ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192

УДК 517.55

Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ

ГАПОУ «Подмосковный колледж «Энергия»

142450, Российская Федерация, Московская обл., г. Старая Купавна, ул. Большая Московская, 190

Аннотация. В работе найдены точные неравенства для наилучшего приближения произвольной аналитической в единичном круге функции f алгебраическими комплексными полиномами через модуль непрерывности m-го порядка производной r-го порядка $f^{(r)}$ в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. Также через модуль непрерывности m-го порядка производной $f^{(r)}$ введен класс аналитических в единичном круге функций $W_m^{(r)}(h,\Phi)$, определяемый заданной монотонно возрастающей на положительной полуоси мажорантой Φ, $h\in(0,\pi/n]$, $n>r$. При определенных условиях на мажоранту Φ для введенного класса функций вычислены точные значения некоторых известных n-поперечников. В работе используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций, а также метод оценки снизу n-поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах, разработанный В. М. Тихомировым. Изложенные в данной работе результаты являются продолжением и обобщением некоторых ранее полученных результатов о наилучших приближениях и значениях поперечников в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$.

Ключевые слова: аналитическая функция, наилучшее приближение, модуль непрерывности высших порядков, весовое пространство Бергмана, поперечники

Для цитирования: *Лангаршоев М.Р.* Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 182–192. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192

The best approximation and the values of the widths of some classes of analytical functions in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$

Mukhtor R. LANGARSHOEV
College near Moscow "Energia"
190 Bolshaya Moskovskaya St., Staraya Kupavna 142450, Moscow Region, Russian Federation

Abstract. In the paper, exact inequalities are found for the best approximation of an arbitrary analytic function f in the unit circle by algebraic complex polynomials in terms of the modulus of continuity of the m th order of the r th order derivative $f^{(r)}$ in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. Also using the modulus of continuity of the m-th order of the derivative $f^{(r)}$, we introduce a class of functions $W_m^{(r)}(h,\Phi)$ analytic in the unit circle and defined by a given majorant Φ, $h \in (0,\pi/n]$, $n > r$, monotonically increasing on the positive semiaxis. Under certain conditions on the majorant Φ, for the introduced class of functions, the exact values of some known n-widths are calculated. We use methods for solving extremal problems in normed spaces of functions analytic in a circle, as well as the method for estimating from below the n-widths of functional classes in various Banach spaces developed by V. M. Tikhomirov. The results presented in this paper are a continuation and generalization of some earlier results on the best approximations and values of widths in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$.

Keywords: analytic function, best approximation, modulus of higher-order continuity, weighted Bergman space, widths

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10, 42A10.

For citation: Langarshoev M.R. The best approximation and the values of the widths of some classes of analytical functions in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 182–192. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В последние годы в теории приближений интенсивно изучаются неравенства, оценивающие величину наилучшего приближения функции посредством модулей непрерывности высших порядков в различных пространствах аналитических функций. Наиболее полно вопросы приближения аналитических функций и вычисления поперечников классов функций изучены в пространствах Харди. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций получены в работах [1–3]. Именно результаты [1] стали отправным пунктом при получении точных значений колмогоровских поперечников в работах [3, 4]. В развитие этой тематики в работах [5, 6] были получены точные значения колмогоровских n-поперечников (определенных в [7]) в метрике пространства Харди для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых допускают представление сверткой, либо усредненные модули непрерывности или гладкости их граничных значений мажорируются заданными функциями. Эта тематика была продолжена во многих работах, в том числе в [8–13]. В пространстве Бергмана исследование указанных вопросов было начато в [14, 15], а первые результаты в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ были получены в [16]. Дальнейшие исследования в этом направлении проводились, например, в работах [17–23].

В настоящей работе приведем обобщение результатов, полученных в [16], и вычислим значения поперечников классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана.

1. Основные понятия

Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество аналитических в U функций. Для произвольной функции $f \in A(U)$ символом $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ обозначим банахово пространство Бергмана с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)} \gamma(|z|)|f(z)|^2\,d\sigma\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U, $d\sigma$ — элемент площади, а интеграл в (1.1) понимается в смысле Лебега. Отметим, что $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определенным для любых $f, g \in \mathscr{B}_{2,\gamma}$ формулой

$$(f, g) = \iint\limits_{D} \gamma(|z|)f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma.$$

Переходя к полярным координатам $z = \rho e^{it}$, $0 \le \rho < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, норму (1.1) запишем в виде

$$\|f\|_{2,\gamma} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^2\,d\rho\,dt\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)M_2^2(f;\rho)\,d\rho\right)^{1/2},$$

где

$$M_2(f;\rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Обозначим через

$$\mathscr{P}_n = \left\{ p_n(z): \ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

совокупность всех алгебраических комплексных полиномов степени n. Определим формулой

$$E_n(f)_{2,\gamma} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : \ \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\} \tag{1.2}$$

величину наилучшего приближения функции $f(z) \in \mathscr{B}_{2,\gamma}$ подпространством $\mathscr{P}_{n-1}$. Легко доказать, что среди произвольных полиномов $p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}$ наименьшее значение нормы $\|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma}$ в (1.2) доставляет частная сумма Тейлора

$$T_{n-1}(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

в разложении $f(z)$ в круге $|z| < 1$. При этом

$$E_n(f)_{2,\gamma} = \|f - T_{n-1}(f; z)\|_{2,\gamma} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho)\, d\rho \right\}^{1/2}. \tag{1.3}$$

Далее, для произвольного множества $\mathfrak{M} \subset \mathscr{B}_{2,\gamma}$ обозначим

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_{2,\gamma} := \sup\{E_n(f)_{2,\gamma} : \ f \in \mathfrak{M}\}.$$

Положим

$$M_2(\Delta_m(f; \cdot, \cdot, u), \rho) = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\Delta_m(f; \rho, t, u)|^2 dt \right)^{1/2},$$

где символом

$$\Delta_m(f; \rho, t, u) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(t+ku)}\right)$$

обозначена разность m-го порядка функции $f(z) = f\left(\rho e^{i(t+ku)}\right)$ по аргументу t. Введем в рассмотрение модуль непрерывности, который определим соотношением

$$\omega_m(f; \rho, \delta)_2 = \sup\{M_2(\Delta_m(f; \cdot, \cdot, u), \rho) : \ |u| \le \delta\}. \tag{1.4}$$

Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим

$$f^{(r)}(z) = \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r}, \quad \alpha_{k,r} = k! \left[(k-r)!\right]^{-1}, \ \ k \ge r.$$

Всюду далее через $\mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, будем обозначать множество функций $f \in A(U)$, у которых $z^r f^{(r)} \in \mathscr{B}_{2,\gamma}$.

Пусть S — единичный шар в пространстве $\mathscr{B}_{2,\gamma}$, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из $\mathscr{B}_{2,\gamma}$, $\Lambda_n \subset \mathscr{B}_{2,\gamma}$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \mathscr{B}_{2,\gamma}$ — подпространство коразмерности n; пусть $\mathcal{L}: \ \mathscr{B}_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, а

$\mathcal{L}^{\perp}:\mathscr{B}_{2,\gamma}\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ на подпространство Λ_n.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ \varphi\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\ \mathcal{L}\mathscr{B}_{2,\gamma}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathcal{L}^{\perp}\mathscr{B}_{2,\gamma}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\}$$

называют, соответственно, бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками в пространстве $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. Поскольку $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ является гильбертовым пространством, для перечисленных n-поперечников выполняются следующие соотношения (см. [24, с. 239]):

$$b_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})\le d^n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})\le d_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\lambda_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\Pi_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma}).\tag{1.5}$$

Пусть задана непрерывная возрастающая на полусегменте $0\le h<\infty$ функция $\Phi(h)$ такая, что $\Phi(0)=0$. Через $W_m^{(r)}(h,\Phi)$, где $m,r\in\mathbb{N}$, $0<h\le\pi/n$, обозначим класс функций $f\in\mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^h\rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^rf^{(r)};\rho,t\right)_2\sin^{\nu}\frac{\beta}{h}t\,d\rho\,dt\le\Phi^2(h),$$

$0<\beta\le\pi$, $0<\nu\le 2n\ln[n/(n-r)]$, $n>r$. Для этого класса функцию $\Phi(h)$ будем называть мажорантой.

Положим

$$(1-\cos nt)_*^m=\begin{cases}(1-\cos nt)^m, & \text{если}\quad nt<\pi,\\ 2^m, & \text{если}\quad nt\ge\pi.\end{cases}$$

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$, $0<h\le\pi/n$ и $\varphi(t)$ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной функции $f(z)\in\mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ имеет место точное неравенство*

$$E_n(f)_{2,\gamma}\le\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h\rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^rf^{(r)};\rho,t\right)_2\varphi(t)\,d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}.\tag{2.1}$$

Равенство в соотношении (2.1) реализуется функцией $f_0(z)=z^n\in\mathscr{B}_{2,\gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной аналитической функции $f(z) \in \mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, согласно определению модуля непрерывности (1.4), получаем

$$\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 = 2^m \sup_{|u|\le t} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \left(1-\cos ku\right)^m \rho^{2k}. \tag{2.2}$$

В силу соотношения (2.2) имеем

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 \varphi(t)\, d\rho\, dt \\ \ge 2^m \int_0^1 \rho\gamma(\rho)\Big[\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1-\cos kt)^m \rho^{2k}\varphi(t)\, d\rho\, dt\Big] \\ = 2^m \sum_{k=n}^{\infty}\left(\alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1-\cos kt)^m \varphi(t) dt\right)|c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)\, d\rho.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение функцию натурального аргумента

$$y(k) = \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1-\cos kt)^m \varphi(t) dt.$$

Это функция, как нами было показано в работе [22], для любого $k \ge n > r$ и неотрицательного $\varphi(t)$, является строго возрастающей. Поэтому

$$\inf\{y(k):\, k\ge n\} = y(n),$$

и из (2.3) получим

$$\int_0^1\int_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 \varphi(t)\, d\rho\, dt \ge 2^m \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1-\cos nt)^m \varphi(t)\, dt \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)\, d\rho.$$

С учетом равенства (1.3) отсюда следует

$$\int_0^1\int_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 \varphi(t)\, d\rho\, dt \ge 2^m \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1-\cos nt)^m \varphi(t)\, dt\, E_n^2(f)_{2,\gamma}. \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) вытекает неравенство (2.1).

Чтобы доказать точность неравенства (2.1), рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in \mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $n\in\mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Для этой функции, с одной стороны, согласно соотношению (1.2) непосредственным вычислением получим

$$E_n(f_0)_{2,\gamma} = \left\{\int_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)\, d\rho\right\}^{1/2}.$$

С другой стороны, из правой части неравенства (2.1) и соотношения (1.4) получим

$$\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^r f_0^{(r)};\rho,t\right)_2\varphi(t)d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}=\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h \rho\gamma(\rho)2^m\alpha_{n,r}^2\rho^{2n}(1-\cos nt)^m\varphi(t)d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)\,d\rho\right)^{1/2}\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}=\left\{\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)\,d\rho\right\}^{1/2},$$

т. е. правая и левая части неравенства (2.1) совпадают. Таким образом точность (2.1) установлена, и тем самым теорема 2.1 доказана. □

Из теоремы 2.1 вытекает следующий полученный М. Ш. Шабозовым и О. Ш. Шабозовым в работе [16] результат.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1 при* $\varphi(t)=\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t,\ \ 0<\nu\le 2\ln[n/(n-r)]$ *имеет место соотношение*

$$E_n(f)_{2,\gamma}\le\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^r f^{(r)};\rho,t\right)_2\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t\,d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}. \tag{2.5}$$

В частности, из соотношения (2.5), при $\nu=1,\ \ \beta=\pi$ *и* $h=\pi/n$ *получаем*

$$E_n(f)_{2,\gamma}\le\frac{\sqrt{m+1}}{2^{m+1/2}\alpha_{n,r}}\left(n\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/n}\rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^r f^{(r)};\rho,t\right)_2\sin nt\,d\rho\,dt\right)^{1/2}.$$

Теорема 2.2. *Если для любого заданного* $0<\mu\le 1$ *и для всех* $\lambda>0,\ \ 0<\beta\le\pi,$ $0<\nu\le 2n\ln[n/(n-r)],\ \ 0<h\le\pi/n$ *функция* $\Phi(h)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^2(\mu h)\int\limits_0^{\lambda\pi}(1-\cos v)_*^m\sin^\nu\frac{\beta v}{\lambda\pi}\,dv\le\Phi^2(\lambda h)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos v)^m\sin^\nu\frac{\beta v}{\mu\pi}\,dv, \tag{2.6}$$

то имеет место равенство

$$\sigma_n\left(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\right)=\frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n), \tag{2.7}$$

где $m,n,r\in\mathbb{N},$ *а* $\sigma_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (2.5) при $h = \mu\pi/n$, соотношения (1.5) и определения класса $W_m^{(r)}(h,\Phi)$ получаем оценки сверху для проекционного n-поперечника

$$\sigma_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big) \le \mathscr{E}_n\big(W_m^{(r)}(h,\Phi)\big)_{2,\gamma} \le \frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\nu\frac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n). \tag{2.8}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского поперечника класса $W_m^{(r)}(h,\Phi)$ для произвольного полинома $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)z^k\in\mathscr{P}_n$ оцениваем $\omega_m(z^rp_n^{(r)};\rho,t)_2$. На множестве $\mathscr{P}_n\cap\mathscr{B}_{2,\gamma}$ введем в рассмотрение $(n+1)$-мерную сферу комплексных полиномов

$$S_{n+1}=\left\{p_n(z)\in\mathscr{P}_n:\ \|p_n\|=\frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n)\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(h,\Phi)$.

Согласно определению (1.4) модуля непрерывности m-го порядка, с учетом равенства

$$\|p_n(z)\|_{2,\gamma}=\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k(f)|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)\,d\rho\right)^{1/2}$$

для произвольного $p_n(z)\in S_{n+1}$ будем иметь

$$\omega_m^2(z^rp_n^{(r)};\rho,t)_2\le 2^m\alpha_{n,r}^2(1-\cos nt)_*^m\sum_{k=0}^{n}|a_k(f)|^2\rho^{2k}.$$

Отсюда следует

$$\int_0^1\int_0^{\lambda h}\rho\gamma(\rho)\omega_m^2(z^rp_n^{(r)};\rho,t)_2\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}\,d\rho\,dt$$
$$\le 2^m\alpha_{n,r}^2\sum_{k=0}^{n}|a_k(f)|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)\,d\rho\int_0^{\lambda h}(1-\cos nt)_*^m\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}\,dt$$
$$=2^m\alpha_{n,r}^2\|p_n\|^2\int_0^{\lambda h}(1-\cos nt)_*^m\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}\,dt. \tag{2.9}$$

Заменив в (2.9) норму полинома по формуле радиуса сферы, получим неравенство

$$\int_0^1\int_0^{\lambda h}\rho\gamma(\rho)\omega_m^2(z^rp_n^{(r)};\rho,t)_2\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}d\rho dt\le\frac{\Phi^2(\mu\pi/n)\displaystyle\int_0^{\lambda h}(1-\cos nt)_*^m\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}dt}{\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\nu\frac{n\beta t}{\mu\pi}tdt}.$$

В правой части последнего неравенства сделаем замену переменной $nt = v$, затем введем обозначение $h = \pi/n$ и, используя условие (2.6), получим неравенство

$$\int_0^1 \int_0^{\lambda h} \rho\gamma(\rho)\omega_m^2(z^r p_n^{(r)};\rho,t)_2 \sin^\nu \frac{\beta t}{\lambda h}\,d\rho\,dt \le \frac{\Phi^2(\mu h)\displaystyle\int_0^{\lambda\pi}(1-\cos v)_*^m \sin^\nu \frac{\beta v}{\lambda\pi}\,dv}{\displaystyle\int_0^{\mu\pi}(1-\cos v)^m \sin^\nu \frac{\beta v}{\mu\pi}\,dv} \le \Phi^2(\lambda h).$$

Это означает, что $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(h,\Phi)$.

Учитывая соотношения (1.5), согласно определению бернштейновского n-поперечника запишем оценки снизу всех n-поперечников

$$\begin{aligned}\sigma_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big) &\ge b_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big) \ge b_n\Big(S_{n+1},\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big)\\ &\ge \frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m \sin^\nu \frac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Равенство (2.7) получаем путем сопоставления оценки сверху (2.8) с оценкой снизу (2.10), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2. □

References

[1] К. И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640. [K. I. Babenko, “Best approximations to a class of analytic functions”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22**:5 (1958), 631–640 (In Russian)].

[2] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.:L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.

[3] Л. В. Тайков, “Некоторые неравенства в теории приближения”, *Analysis Mathematica*, **2**:1 (1976), 77–85. [L. V. Taikov, “Some exact inequalities in the theory of approximation of functions”, *Analysis Mathematica*, **2**:1 (1976), 77–85 (In Russian)].

[4] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.:V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **15**:3 (1960), 75-111.

[5] Л. В. Тайков, “Поперечники некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **22**:2 (1977), 285–295; англ. пер.:L. V. Taikov, “Diameters of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **22**:2 (1977), 650–656.

[6] Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 341–351; англ. пер.:N. Ainulloev, L. V. Taikov, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, **40**:3 (1986), 699–705.

[7] A. Kolmogoroff, “Uber Die Beste Annaherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse”, *Annals of Mathematics*, **37**:1 (1936), 107–111.

[8] S. D. Fisher, C. A. Micchelli, “The n-widths of sets analytic function”, *Duke Math. J.*, **47** (1980), 789–801.

[9] М. З. Двейрин, И. В. Чебаненко, “О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций”, *Теория отображений и приближение функций*, Наукова думка, Киев, 1983, 62–73. [M. Z. Dveyrin, I. V.Chebanenko, “On polynomial approximation in Banakh spaces of analytic functions”, *Mapping Theory and Funktion Approximation*, Naukova Dumka Publ., Kiev, 1983, 62–73 (In Russian)].

[10] Ю. А. Фарков, “О поперечниках некоторых классов аналитических функций”, *УМН*, **39**:1(235) (1984), 161–162; англ. пер.:Yu. A. Farkov, “On diameters of some classes of analytic functions”, *Russian Math. Surveys*, **39**:1 (1984), 153–154.

[11] A. Pinkus, *n-width in Approximation Theory*, Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[12] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 615–619.

[13] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций”, *ДАН России*, **382**:6 (2002), 747–749. [M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, “Best approximation and values of the widths of some classes of analytical functions”, *Doklady Mathematics*, **382**:6 (2002), 747–749 (In Russian)].

[14] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I”, *Укр. матем. журн.*, **42**:7 (1990), 873–881; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classses of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:7 (1990), 769–778.

[15] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II”, *Укр. матем. журн.*, **42**:8 (1990), 1019–1026; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classses of functions analytic in the unit disc. II”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:8 (1990), 907–914.

[16] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$”, *Доклады Академии наук*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces”, *Doklady Mathematics*, **75**:1 (2007), 97–100.

[17] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов функций, аналитических в круге”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 3–21; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, “The widths of classes of analytic functions in a disc”, *Sbornik Mathematics*, **201**:8 (2010), 1091–1110.

[18] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, “О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве бергмана”, *Доклады Академии наук*, **450**:5 (2013), 518–521; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, “The best linear methods and values of widths for some classes of analytic functions in the Bergman weight space”, *Doklady Mathematics*, **87**:3 (2013), 338–341.

[19] Р. Р. Акопян, М. С. Саидусайнов, “Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге”, Тр. ИММ УрО РАН, **23**, №3, 2017, 22–32; англ. пер.:R. R. Akopyan, M. S. Saidusajnov, “Three extremal problems in the Hardy and Bergman spaces of functions analytic in a disk”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **303** (2018), 25–35.

[20] С. Б. Вакарчук, “Оценки значений n-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$”, *Матем. заметки*, **108**:6 (2020), 803–822; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Estimates of the values of n-widths of classes of analytic functions in the weight spaces $H_{2,\gamma}(D)$”, *Mathematical Notes*, **108**:6 (2020), 775–790.

[21] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в L_2”, *Изв. вузов. Матем.*, **64**:6 (2020), 65–72; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusaynov, “Approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems in L_2”, *Russian Mathematics*, **64**:6 (2020), 56–62.

[22] М. Р. Лангаршоев, “Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Чебышевский сборник*, **22**:2 (2021), 135–144. [M. R. Langarshoev, “Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space”, *Chebyshevskii Sbornik*, **22**:2 (2021), 135–144 (In Russian)].

[23] М. Р. Лангаршоев, “О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 339–350. [M. R. Langarshoev, “On the best approximation and the values

of the widths of some classes of functions in the Bergmann weight space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 339–350 (In Russian)].

[24] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

Информация об авторе

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, преподаватель математики. Подмосковный колледж «Энергия», г. Старая Купавна, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Поступила в редакцию 03.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the author

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physics and Mathematics, Mathematics Teacher. College near Moscow “Energia”, Staraya Kupavna, Moscow Region, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Received 03.05.2023
Reviewed 03.06.2023
Accepted for press 09.06.2023